文章编号: 1003-2843(2012)01-0001-04

关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的两个问题

黄炜 [1] 马焱 [2]
（1. 宝鸡职业技术学院基础部, 陕西 宝鸡 721000; 2. 宝鸡文理学院经济管理系, 陕西 宝鸡 721013）

摘 要:著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为：对于任意正整数 n，存在为最小的正整数 m，使得 $n|m!$， 即：$S(n)=\min\{m:n|m!,m\in N\}$，利用初等方法及解析方法，研究了 $\ln S(n)$ 的均值分布性质，给出了一个有趣的均值定理，获得了这些数列的渐近公式，解决了 Felice Russo 在文献 [1] 中提出的两个扩展极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}$ and $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{SSC(n)}{\sum\limits_{k\le n}\ln SSC(k)}$ 的计算问题，发展了 F. Smarandache 教授在 Only Problems, Not Solution 一书(Xiquan Publishing House, 1993)中涉及的相关研究工作.

关键词: Smarandache 函数 $S(n)$ ；分布性质；极限；渐近公式
中图分类号: O156 文献标识码: A
doi: 10.3969/j.issn.1003-2483.2012.01.01

1 引言

著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为：对于任意正整数 n，存在最小的正整数 m，使得 $n|m!$ 即：$S(n)=\min\{m:n|m!,m\in N\}$，该数列的前几项为：

$1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,5,7\cdots$

根据 $S(n)$ 的定义和性质，易推出，对于任意正整数 n，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$（为 n 的标准素因数分解式），则有 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$．有关函数 $S(n)$ 的性质,已有不少的文献 [2-8]进行了研究,得到了许多有价值的成果．本文将 FELICE RUSSO 教授提出

的问题进行了推广和延伸，然后利用数素数分解理论、初等及解析的方法，研究了 $\ln S(n)$ 值

的分布，进而解决了下面两个极限的计算问题：

$$1:\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n},\ 2:\ \lim_{n\to\infty}\frac{SSC(n)}{\sum\limits_{k\le n}\ln SSC(k)}.$$

即就是证明下面的结论：

定理 1 对于任意实数 $x\ge 2$，有渐近估计公式：

$$\sum_{n\le x}\ln S(n)=x\ln x+O(x).$$

收稿日期：2011-11-10
作者简介：黄炜(1961-)，男，陕西岐山人，教授，研究方向：解析数论与特殊函数.
基金项目：国家自然科学基金项目(11071194)，陕西省自然科学基金项目资助(09JK432).

定理 2 对于任意自然数$n>1$，有渐近估计式: $\dfrac{\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln S(k)}{\ln k}}{n}=1+O\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$,

则有极限式 ： $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln S(k)}{\ln k}}{n}=1$

定理 3 对于任意自然数$n>1$，则有渐近估计式: $\dfrac{S(n)}{\sum_{k\le n}\ln S(k)}=O\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

则有极限式: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S(n)}{\sum_{k\le n}\ln S(k)}=0$.

2 引理及其证明

引理 1[4]

对于任意的正整数 $n>1$，令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示n的标准分解式, 如果$\alpha_i>2(i=1,2,\cdots,n)$，那么称$n$为 square － full 数. 令$A_2(x)$ 表示不超过 x 的 square － full 数的集合, 有渐近公式:

$$A_2(x)=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}}\exp\left(-C\log\frac{2}{5}x\left(\log\log x\right)^{-\frac{1}{5}}\right)\right)\ . \tag{1}$$

C＞0 为常数, ζ(s)为 Riemann－zeta 函数.

其证明见参考文献[4].

引理 2 对任意实数$x\ge1$, 有渐近公式:

$$\sum_{\substack{pk\le x\\(p,k)=1}}\ln p=x\ln x+O(x)\ . \tag{2}$$

其中 p 是任意素数, k 是任意正整数.

证明: 素数定理有几个不同的表示形式[8], 从而我们有:

$\sum_{k\le x}\dfrac{\ln p}{p}=\ln x+O(1)$, $\sum_{k\le x}\ln p=x+O\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)$, $\sum_{k\le x}\dfrac{\ln p}{p^2}=D+O\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$

D 是可计算的正常数.

由上述渐近公式, 有:

$$\sum_{\substack{pk\le x\\(p,k)=1}}\ln p=\sum_{pk\le x}\ln p\sum_{k\le\frac{x}{p}}1=\sum_{pk\le x}\ln p\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O(1)\right)=x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}-x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p^2}+O\left(\sum_{p\le x}\ln p\right)=x\ln x+O(x)\cdot$$

这就证明了引理 2.

3 定理及其证明

定理 1 的证明

令$U(n)=\sum_{n\le x}\ln S(n)$，我们先估计$U(n)$的上界·事实上，依据$S(n)$的定义，对任意一个正整数$n$:有

$S(n)\le n$, 和 $\ln S(n)\le \ln n$ 成立, 因此

$$\sum_{n\le x}\ln S(n)\le \sum_{n\le x}\ln n .$$

由欧拉求和公式得

$$\sum_{n\le x}\ln S(n)\le \sum_{n\le x}\ln n = x\ln x - x + O(\ln x) = x\ln x + O(x) . \tag{3}$$

接下来估计的下界.将区间 $[1,x]$ 中的整数分成如下两个集合 A 和 B：

$A=\{m$ 是square -full 数，且$m\in[1,x]$ $\}$ 表示 $[1,x]$;

$B=\{m$ 不是square -full 数，且$m\in[1,x]$ $\}$ 于是有:

$$\sum_{n\le x}\ln S(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln S(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln S(n) . \tag{4}$$

由集合 A 的定义及引理 1, 有:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln S(n)\le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln n\le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln x=\ln x\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}1=\ln xA_2(x)<<\sqrt{x}\ln x . \tag{5}$$

现在估计和式在集合 B 上的渐近公式.

$S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$，故对集合 B 中任意整数 n，一定存在一个素数 p 使得 $p\mid n$ 且 $p^2\nmid n$.因此根据 $S(n)$ 函数的定义,有 $S(np)>p$.由这即可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln S(n)=\sum_{\substack{np\le x\\ (n,p)=1}}\ln S(n)\ge \sum_{\substack{np\le x\\ (n,p)=1}}\ln p . \tag{6}$$

由引理 2 及(6)式, 有:

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln S(n)\ge x\ln x+O(x) . \tag{7}$$

由(4)、(5)和(7)式, 有: $\sum\limits_{n\le x}\ln S(n)\ge x\ln x+O(x)$. (8)

由(3)和(8)式, 有: $\sum\limits_{n\le x}\ln S(n)=x\ln x+O(x)$.

定理 1 证明完毕.

定理 2、3 的证明

一方面, 由定理 1, 有:

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln S(k)}{\ln k}}{n}\ge \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln S(k)}{\ln n}}{n}\ge \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln S(k)}{n\ln n}=\frac{n\ln n+O(n)}{n\ln n}=1+\left(\frac{1}{\ln n}\right) . \tag{9}$$

另一方面, 由 $S(n)$ 的定义, 有:

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln S(k)}{\ln k}}{n}\le \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}}{n}=\frac{n-1}{n}<1< 1 . \tag{10}$$

结合(9)和(10)式, 有: $\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln S(k)}{\ln k}}{n}=1+\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

定理 2 证明完毕.

在定理 2 中取 $n\to\infty$ 时即可推出对应的极限.

根据 $S(n)$ 的定义及定理 1，有:

$$0\le\frac{S(n)}{\sum_{k\le n}\ln S(k)}\le\frac{n}{n\ln n+O(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\ . \tag{11}$$

由(11)式，有: $\frac{S(n)}{\sum_{k\le n}\ln S(k)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$

定理 3 证明完毕.

在定理 3 中取 $n\to\infty$ 时即可推出对应的极限.

参考文献:

[1] FELICE RUSSO. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory［M］. USA: American research press, 2000.

[2] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报, 2006, 49(5):1009-1012.

[3] SANDOR J. On a Dual of the Pseudo-smarandache Function[J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 16-23.

[4] WANG YONG-XING. On the Smarandache Function[J]. Reserchon Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.

[5] ASHBACHER C. An introduction to the Smarandache function[M]. Vail: Erhus University Press, 1995.

[6] 黄炜. 关于 Smarandach 的 k 次方部分数列[J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2010,36(5): 1-3.

[7] 黄炜. 赵教练关于 Smarandach 平方方根部分数列[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2010, 27(6): 8-10.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科技出版社, 1988.

On two questions of Smarandache function

HUANG Wei [1], MA Yan [2]

(1. Department of Basic Courses, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P.R.C.; 2. Department of Ecomomics and Management, Baoji University of Arts and Siences, Baoji shaanxi 721013, P.R.C.)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache $S(n)$ is defined as the smallest integer that n|m!. That is $S(n)=\min\{m:n|m!,m\in N\}$. The main purpose of this paper is to study the arithmetical properties of $\ln S(n)$ by the elementary methods and analytic methods; an interesting mean value theorem is obtained, and the asymptotic formula is obtained for these sequences. The problem of calculation is solved for $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln SSC(k)}{\ln k}}{n}$ and $\lim_{n\to\infty}\frac{SSC(n)}{\sum_{k\le n}\ln SSC(k)}$ proposed by Felice Russo in reference[1]. Related research is developed that is proposed by Professor F. Smarandache in his book Only Problems, Not Solution .

Key words: Smarandache function; distribution property; limit; asymptotic formula